Changeons d'air : Amine Boujemaa 1°7

Pour résoudre cette énigme, nous allons nous appuyer sur les relations mathématiques suivantes :

- ➔ Théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$ où a et b sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, et c est l'hypoténuse.
- ➔ Air d'un carré : $Air = c^2$, où c représente la longueur d'un côté.
- ➔ Une équation polynomiale de degré 2 qui s'écrit sous la forme $ax^2 + bx^2 + c = 0 \; avec \; a \neq 0$.
- ➔ Somme des angles d'un triangle : La somme de tous les angles d'un triangle est toujours égale à $180°$.
- ➔ Relation trigonométriques dans un triangle rectangle :
  - ◆ Cosinus : $cos(\theta) = \frac{adjacent}{hypoténuse}$
  - ◆ Sinus : $sin(\theta) = \frac{opposé}{hypoténuse}$
  - ◆ Tangente : $tan(\theta) = \frac{opposé}{adjacent}$

On sait que l'air du premier carré (a) est égal à $1 \; dm^2$ et celle du second (b) est égal à $58/49 \; dm^2$. Nous utilisons donc la formule de l'air d'un carré afin de calculer la longueur d'un seul côté de carré :

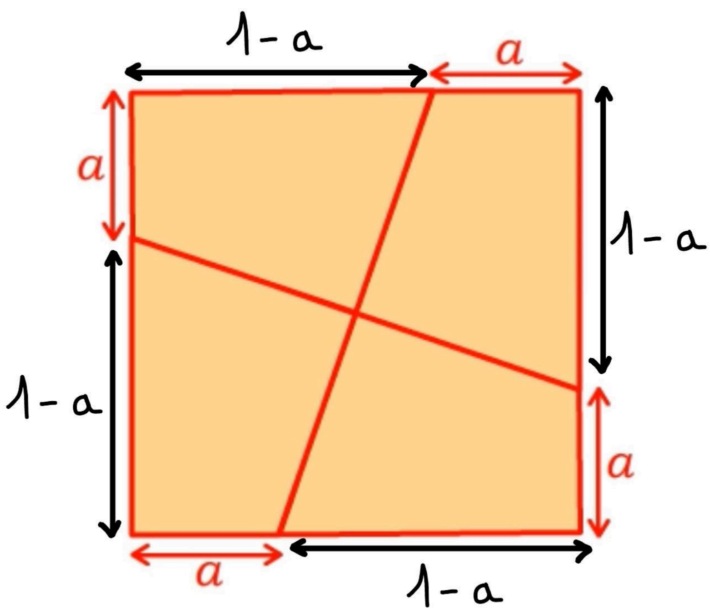
$$1 = c_a^2 \Leftrightarrow c_a = \sqrt{1} = 1 \; dm.$$

$$58/49 = c_b^2 \Leftrightarrow c_b = \sqrt{58/49} \Leftrightarrow c_b = \sqrt{58}/7 \; dm.$$

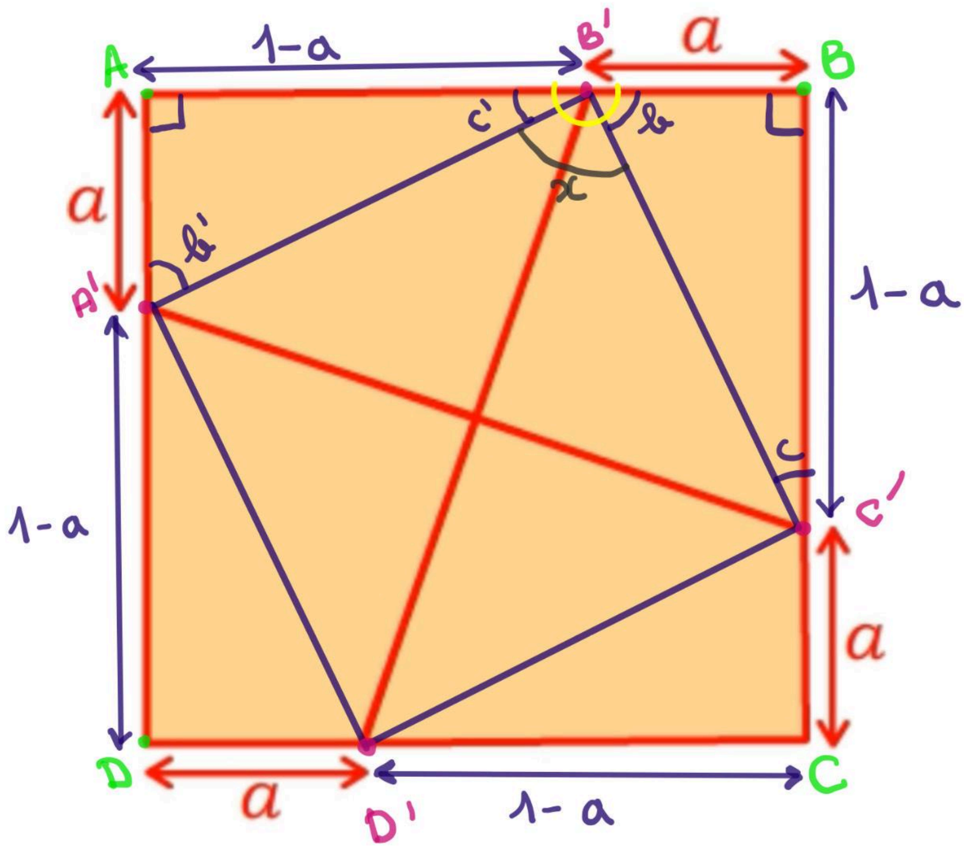
Sur chaque côté du carré (a), il y a une certaine longueur a qu'on souhaite retrouver. Étant donné que nous connaissons la longueur totale d'un côté du carré, nous pouvons déduire

Changeons d’air : Amine Boujemaa 1°7

la longueur restante sur ce côté, une fois a soustrait (qui sera (1-a) comme noté sur la figure ci-dessous).



On dessine les hypoténuses interceptant les côtés de longueur 1-a et a afin de faire apparaître des triangles rectangles, on remarque que ces hypoténuses ont formé un quadrilatère . On nomme ainsi les angles de ces triangles rectangles/sommets des carrés comme montré ci-dessous :



<u>Changeons d'air : Amine Boujemaa 1°7</u>

D'abord, on va montrer que le quadrilatère A'B'C'D' est bien un carré.

D'une part :
En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AA'B', on a bien
$A'B' = \sqrt{(AB')^2 + (AA')^2} = \sqrt{a^2 + (1-a)^2}$, en faisant la même chose pour les 3 autres triangles : BB'C', CC'D' et DD'A' on a bien $A'B' = \sqrt{a^2 + (1-a)^2} = B'C' = C'D' = D'A'$
Donc le quadrilatère A'B'C'D' a les quatre côtés égaux.

D'autre part :
On utilise la trigonométrie afin de calculer la mesure des angles C' et C, ainsi on a :

ĉ' = arctan(a/1−a)
ĉ= arctan(a/1−a)

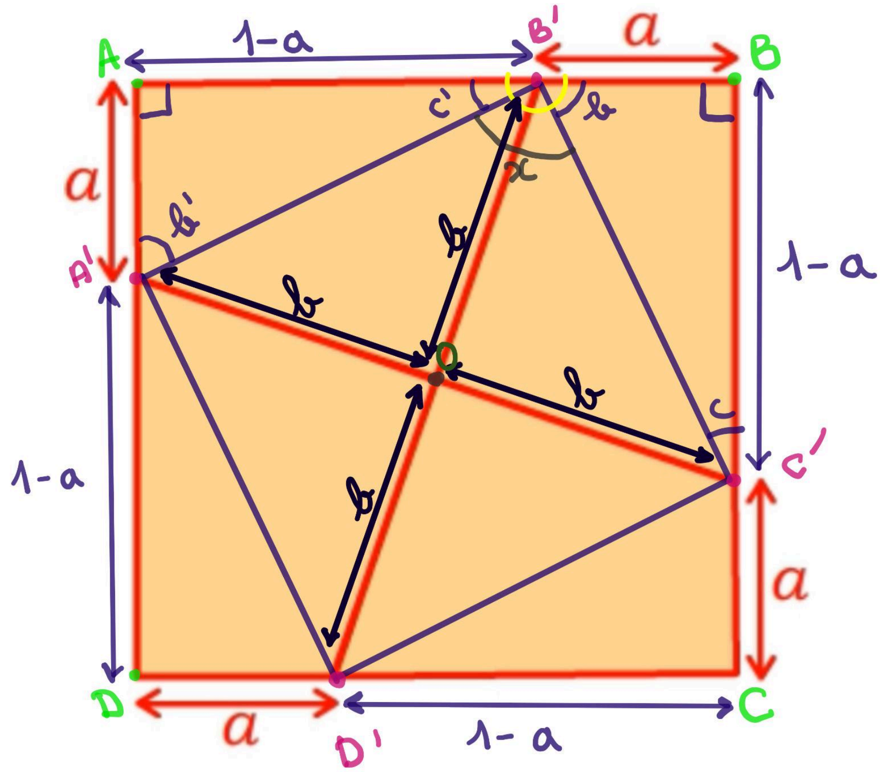
On en déduit que ĉ = ĉ' car ces deux angles sont compris entre 0 et pi/2.

On dessine en jaune sur la figure l'angle plat $\widehat{BB'A} = 180°$.

Cet angle plat est la somme de 3 angles : $\widehat{b}, \widehat{c'}, \widehat{x}$. Autrement dit, on a $180 = \widehat{b} + \widehat{c}' + \widehat{x}$; Or $\widehat{c}' = \widehat{c}$ ainsi $\widehat{x} = 180 - (\widehat{c'} + \widehat{b}) = 180 - (\widehat{c} + \widehat{b})$. On sait que dans un triangle la somme de tous les angles est toujours égale à 180 le triangle $BB'C$ étant rectangle alors :

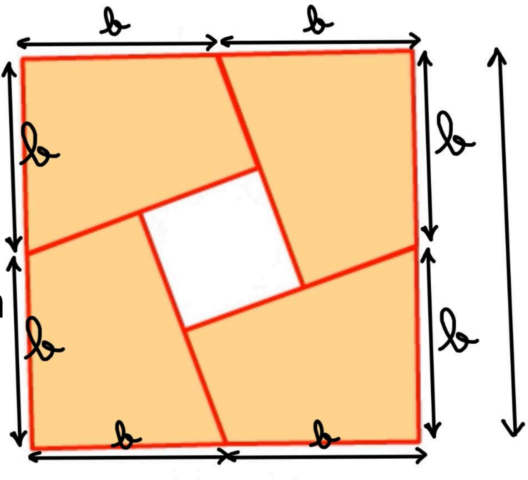
$180 = 90 + \widehat{b} + \widehat{c} \Rightarrow \widehat{b} + \widehat{c} = 90$. On en déduit que $\widehat{x} = 180 - 90 = 90$. **Donc le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré puisque ses 4 côtés sont de même longueur et qu'il possède 1 angle droit.**

Changeons d’air : Amine Boujemaa 1°7



On note O le milieu du carré $A'B'C'D'$, et on désigne b la moitié de la longueur de ses diagonales.

Après la rotation, la longueur b est devenue égale à la moitié de la longueur d’un côté du carré B.

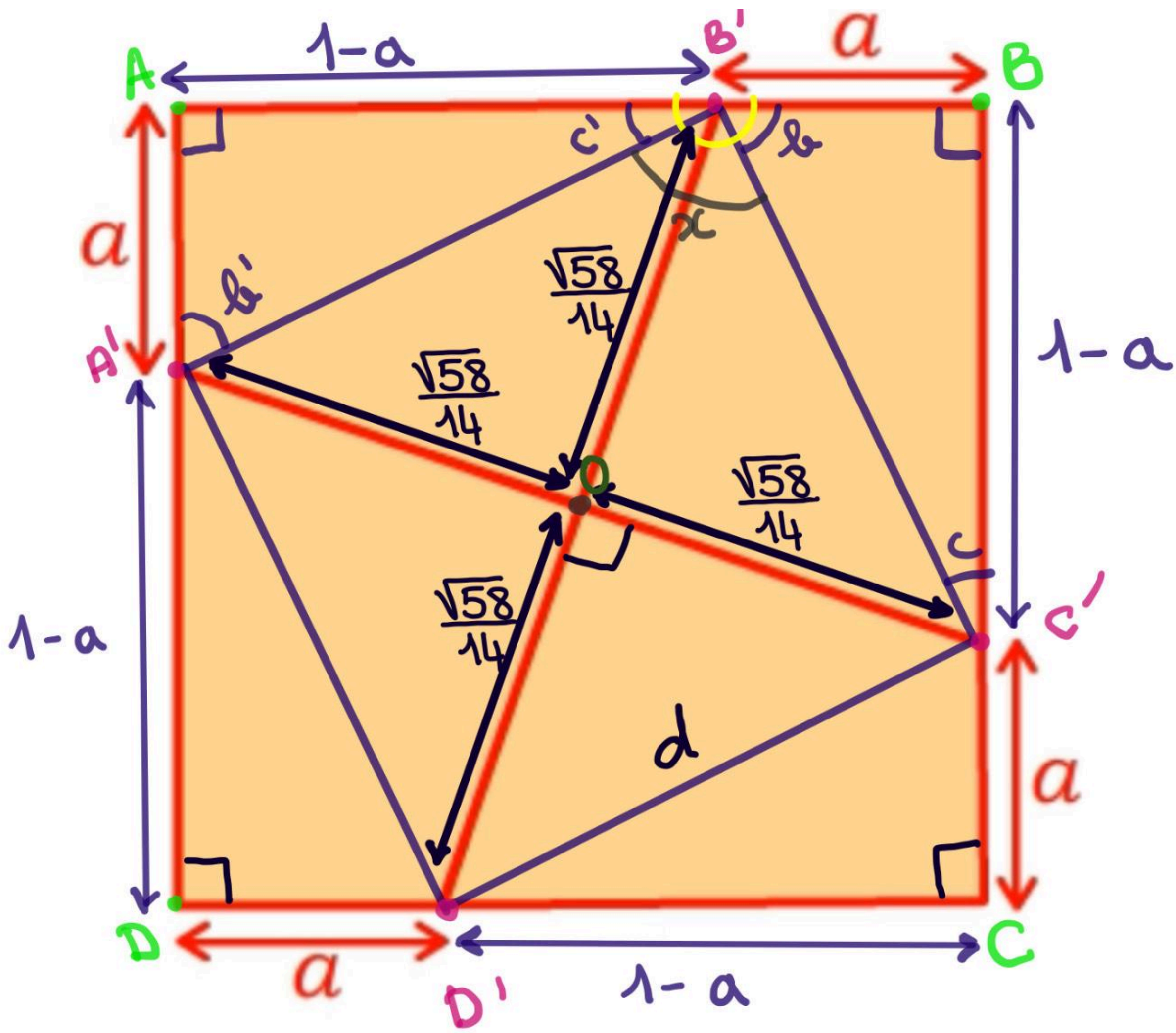


$C_b = \frac{\sqrt{58}}{7}$ dm.

On en déduit alors cette équation étant donné qu’on connaît déjà la longueur du côté du carré B :

$Cb = 2 \times b \Leftrightarrow \sqrt{58}/7 = 2 \times b \Leftrightarrow b = \sqrt{58}/7 \div 2 = \sqrt{58}/14\, dm.$

Changeons d'air : Amine Boujemaa 1°7



On sait que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires. On remarque sur la figure que les triangles rectangles $D'C'O$ et $CC'D'$ ont la même hypoténuse qu'on va nommer d :

D'après le théorème de Pythagore :

$$d^2 = (\frac{\sqrt{58}}{14})^2 + (\frac{\sqrt{58}}{14})^2$$

$$d^2 = (1 - a)^2 + a^2 = 2a^2 - 2a + 1$$

<u>Changeons d'air : Amine Boujemaa 1°7</u>

On en déduit par substitution :

$2a^2 - 2a + 1 = (\frac{\sqrt{58}}{14})^2 + (\frac{\sqrt{58}}{14})^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 = \frac{58+58}{196}$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 - \frac{116}{196} = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + \frac{20}{49} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times \frac{20}{49} = \frac{36}{49}$

$x1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{\frac{36}{49}}}{4} = \frac{2}{7} \approx 0,29\ dm$

$x2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{\frac{36}{49}}}{4} = \frac{5}{7} \approx 0.71\ dm$

La longueur a est donc égale à $\frac{5}{7}\ dm$ **car, cette longueur est comprise entre** $0,5\ et\ 1\ dm$ **ce qui n'est pas le cas pour** $\frac{2}{7}\ dm$

$(0,29 < 0.5\ alors\ que\ \ 0,5 < 0.71 < 1)$**.**